Leçon 161 - Isométriqes d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimension 2 et 3.

Cadre : E est un espace affine euclidien de dimension $n \geq 1$ et de direction V.

1. Généralités. —

1. Définition. —

- Def : Une application $f : E \to E$ est une application affine s'il existe $v_f : V \to V$ linéaire telle que $\forall M \in E, \forall \overrightarrow{x} \in V,\ f(M + \overrightarrow{x}) = f(M) + v_f(\overrightarrow{x})$, càd : $f \circ t_{\overrightarrow{x}} = t_{v_f(\overrightarrow{x})} \circ f$.
- Def : $fE \to E$ est une isométrie affine ssi $\forall A, B \in E, = \|\overrightarrow{f(A)f(B)}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$.
- Ex : Les translations, les homothéties de rapport ± 1 sont des isométries affines.
- Pro : $f : E \to E$ est une isométrie affine ssi c'est une application affine dont la partie linéaire est une application orthogonale.
- Cor : Une isométrie affine est bijective.
- Pro : L'ensemble $Isom(E)$ des isométries affines de E forme un sous-groupe du groupe affine $GA(E)$.
- Pro : Les translations forment un sous-groupe de $Isom(E)$, isomorphe à $(E, +)$.
- Def : On note $Isom^+(E) := \{f \in Isom(E) \text{ tq } det(v_f) = 1\}$ le sous-groupe des isométries directes et $Isom^-(E) := \{f \in Isom(E) \text{ tq } det(v_f) = -1\}$ le sous-groupe des isométries indirectes.

2. Ecriture canonique d'une isométrie. —

- Pro : Soit $O \in V$. L'ensemble $Is_O(E) := \{f \in Isom(E) \text{ tq } f(O) = O\}$ est appelé stabilisateur de O.
  C'est un sous-groupe de $Isom(E)$, et $f \in Is_O(E) \mapsto v_f \in O(V)$ est un isomorphisme de groupes.
- Pro : Soit $f \in Isom(E)$. L'ensemble $Inv(f)$ des points invariants de f est un sous-espace affine de E de direcion $Inv(v_f) := Ker(v_f - Id_V)$.
- Thm : Toute isométrie affine f s'écrit de façon unique $f = t_u \circ g = g \circ t_u$ où $u \in Inv(v_f)$ est g est une isométrie affine possédant au moins un point fixe.
- Cor : Si $Inv(v_f) = \{0_V\}$ alors f admet un unique point fixe.
- Thm : Soit $(A_0, A_1, .., A_n)$ un repère affine de E. On considère $B_0, .., B_n \in E$ tels que $\|\overrightarrow{B_iB_j}\| = \|\overrightarrow{A_iA_j}\|\ \forall i, j$.
  Alors il existe une unique isométrie affine envoyant $(A_0, A_1, .., A_n)$ sur $(B_0, B_1, ..., B_n)$. De plus, $(B_0, .., B_n)$ est un repère affine de E.
- Cor : Une isométrie affine est entièrement déterminée par l'image de (n+1) points.

2. Le groupe orthogonal $O(V)$. —

1. Etude du groupe orthogonal. —

- Pro : $O(V) \simeq O_n(\mathbb{R}) := \{M \in M_n(\mathbb{R}) \text{ tq } M.M^t = I_n\}$ par le choix d'une base orthonormée de V.
- Pro : $O_n(\mathbb{R})$ est compact.
- Pro : Soit $f \in O(V)$. Si un s-ev F est $f - stable$, alors $F^\perp$ est f-stable.
- Pro : Soit $f \in GL(V)$ une symétrie. Alors les sous-espaces $Ker(f - Id)$et $Ker(f + Id)$ sont en somme directe.
  De plus, $f \in O(V)$ ssi ces espaces sont orthogonaux. f est alors appelée symétrie orthogonale.
- Def Une réflexion (orthogonale) est une symétrie (orthogonale) telle que $dim(Ker(f + Id)) = 1$.
  Un renversement (orthogonal) est une symétrie (orthogonale) telle que $dim(Ker(f + Id)) = 2$.
- Thm : $O(V)$ est engendré par les réflexions orthogonales.
  Tout $f \in O(V)$ est produit d'au plus n réflexions.
- Cor : Toute isométrie de E peut s'écrire comme un produit d'au plus n+1 réflexions.
- Thm : Pour $n \geq 3$, $O(V)$ est engendré par les renversements orthogonaux
  Tout élément $f \in O(V)$ est produit d'au plus n renversements.

2. Réduction des isométries et applications. —

- Théorème de réduction des isométries : Soit $f \in O(V)$. Alors il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est la matrice diagonale par blocs $Diag(I_p, -I_q, R_{\theta_1},$
  où $R_t := \begin{pmatrix} cos(t) & -sin(t) \\ sin(t) & cos(t) \end{pmatrix}$, avec $\theta_i \in [0, 2\pi[- \{0, \pi\}$.
  Cela revient à décomposer V en somme directe orthogonale d'espaces f-stables : $V = V_1 \oplus V_{-1} \oplus P_1 \oplus .. \oplus P_s$ où $V_1 = Ker(f + Id)$, $V_{-1} = Ker(f - Id)$, et P_i sont des plans sur lesquels $f|_{P_i}$ est une rotation plane distincte de $\pm Id$.
- App : Le groupe $SO(V)$ est compact et connexe par arcs.
  $O(V)$ possède deux composantes connexes par arcs, qui sont homéomorphes.
- App : Décomposition polaire : Pour tout $M \in Gl_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $M = OS$.
  De plus, l'application $M \mapsto (O, S)$ est un homéomorphisme.
- App : $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $Gl_n(\mathbb{R})$, et tout sous-groupe compact maximal de $Gl_n(\mathbb{R})$ est conjugué à $O_n(\mathbb{R})$.
- **Dev** : L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité fermée de $M_n(\mathbb{R})$ pour la norme $\|.\|_2$.
- App : Le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.
- **Dev** : Soit G le groupe des quaternions de norme 1. Alors $G/\{\pm 1\} \simeq SO_3(\mathbb{R})$.
- Rem : Cet isomorphisme, permet de ramener le calcul de l'image d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ par une rotation à des produits dans $\mathbb{H}$ en identifiant les vecteurs $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ du repère orthonormé canonique de $\mathbb{R}^3$ aux éléments i,j,k de $\mathbb{H}$. (utilisé en simulation 3D)

3. Classification des isométries du plan et de l'espace. —

1. En dimension 2. —

- Def : Soit D une droite affine de E. On appelle symétrie glissée d'axe D une fonction de la forme $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ r_D$ où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de D et où r_D es la réflexion orthogonale d'axe D.
- Pto : Les isométries directes du plan euclidien E_2 sont les translations et les rotations autour d'un point. Une isométrie directe a un point fixe ssi c'est une rotation.
  Les isométries indirectes sont les symétries orthogonales par rapport à une droite et les symétries glissées. Une symétrie indirecte a un point fixe ssi c'est une symétrie orthogonale par rapport à une droite.
- Tableau listant les points fixes, la nature, le caractère direct/indirect, et la forme matricielle réduite des isométries affines du plan euclidien.

2. *En dimension 3.* —

- Def+Pro : On appelle rotation affine de l'espace euclidien E_3 toute application affine f dont la partie linéaire est une rotation et telle que $Inv(f)$ est non-vide.
  Si r est une rotation affine dont la partie linéaire est distincte de Id_V, alors $Inv(f) := D$ est une droite affine appelée axe de rotation. On note alors $f = r_D$.
- Def : On appelle vissage d'axe D et de vecteur $\overrightarrow{u}$ une fonction affine de la forme $f := t_u \circ r_D$, où r_D est une rotation d'axe D et où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de D.
- Def : On appelle rotation-symétrie une fonction affine de la forme $f := r_D \circ s_{D^\perp}$ où r_D est une rotation d'axe D et $s_{D^\perp}$ un renversement par rapport au plan $D^\perp$.
- Pro : Les isométries directes de l'espace euclidien E_3 sont les vissages et les rotations autour d'un axe.
  Une isométrie directe a des points fixes ssi c'est une rotation autour d'un axe ou bien Id_E.
  Les isométries indirectes sont les réflexions, les réflexions glissées, et les rotations-symétries.
  Une isométrie indirecte a un point fixe ssi c'est une réflexion ou une rotation-symétrie.
- Tableau listant les points fixes, la nature, le déterminant, et la forme matricielle des isométries affines de l'espace euclidien.
- Exemple du Combes.

4. Groupe d'isométries préservant une partie du plan ou de l'espace. —

1. *Généralités.* —

- Def : Pour P une partie de E, on note $Isom(P)$ l'ensemble des $f \in Isom(E)$ telles que $f(P) = P$.
- Thm : $Isom(P)$ est un groupe, et $Isom^+(P) := Isom^+(E) \cap Isom(P)$ est un sous-groupe de $Isom(P)$.
  Pour $Isom^-(P) := Isom^-(E) \cap Isom(P)$, on a une bijection entre $Isom^+(P)$ et $Isom^-(P)$.
- Thm : Toute isométrie laissant une partie finie $P = \{A_0, A_1, .., A_{n-1}\}$ stable laisse fixe l'isobarycentre O des points $A_0, .., A_{n-1}$.
- Rem : Il suffit de trouver l'ensemble $Isom^+(P)$ et une isométrie indirecte pour connaître tout $Isom(P)$.
  Lorsque P est fini, on s'intéresse aux isométries fixant l'isobarycentre des éléments de P.
- Ex : Soit ABC un triangle non isocèle. Alors $Isom(\{A, B, C\} = \{Id_{E_2}\}$.
  Si ABC est un triangle isocèle, non équilatéral, alors $Isom(\{A, B, C\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2. *Polygones réguliers (dimension 2).* —

- Def : On note P_n le polygone régulier à n sommets $A_0, .., A_{n-1}$, d'isobarycentre O.
- Thm : $Isom^+(P_n) = \{Id, r_O, .., r_O^{n-1}\}$ est un groupe cyclique d'ordre n engendré par r_O la rotation de centre O qui envoie A_0 sur A_1 (d'angle $\frac{\pi}{n}$).
- Thm : Il y a exactement n réflexions laissant P_n stable.
  Si n est impair, ce sont les réflexions par rapport aux droites (OA_k).
  Si n est pair, ce sont les réflexions par rapport aux médiatrices des segments $[A_k, A_{k+1}]$ ainsi que $[A_{n-1}, A_0]$.
- Thm : Le groupe $Isom(P_n)$ est appelé groupe diédral et est noté D_n. Il est d'ordre 2n , et est engendré par r_O d'ordre n et par une réflexion s d'ordre 2.
- Ex : $D_3 \simeq \Sigma_3$.

3. *Cube et tétraèdre (dimension 3).* —

- Def+Pro : Soit K un cube. On définit $Isom(K)$ par l'ensemble des isométries affines préservant l'ensemble sommets de K.
  Ces isométries vont aussi préserver l'ensemble des faces de K , l'ensemble des arrêtes de K, et l'ensemble des diagonales de K.
- Thm : Soit K un cube de E_3. On a : $Isom^+(K) \simeq \Sigma_4$, et $Isom(K) \simeq \Sigma_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- App : Il y a 57 manières différentes (à déplacement près) de colorier un cube avec 3 couleurs.
- Def+Pro : Soit T un tétraèdre régulier. On définit $Isom(T)$ par l'ensemble des isométries affines préservant l'ensemble sommets de T.
  Ces isométries vont aussi préserver l'ensemble des faces de T et l'ensemble des arrêtes de T.
- Thm : Soit T un tétraèdre régulier de E_3. On a : $Isom(T) \simeq \Sigma_4$ et $Isom^+(T) \simeq A_4$.

Références

Mercier : Isométrie affine, bijectivité, isométries directes/indirectes. Stabilisateur d'un point, écriture canonique d'une isométrie, image d'un repère affine. Réflexions glissées. Rotation affine, vissage, rotation-symétrie. Isométries préservant une partie, exemples. Polygones réguliers en dimension 2, groupe diédral. Isométries du cube, du tétraèdre.
Combes : Tableau listant les isométries du plan. Tableau listant les isométries de l'espace, exemple.
Caldero, Germoni : Décomposition polaire, $O_n(\mathbb{R})$ compact maximal, $SO_3(\mathbb{R})$ simple, $SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions.(Dev) . Isométries du cube, du tétraèdre, applications.
Perrin : Symétrie orthogonale, réflexion orthogonale, renversement orthogonal, $O(V)$ engendré par les renversements, réduction des isométries. $SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions.(Dev)

Audin : Application affine, translations, homothéties, propriétés. $O(V)$ enrendré par les réflexions, $O(V)$ compact avec 2 composantes connexes.
Szpirglas : Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$.(Dev)

June 3, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes